Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Навчально-науковий інститут автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки

Кафедра вищої математики

04-02-49М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи та підготовки до практичних занять з навчальної дисципліни **«Вища математика»** для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за *освітньо-професійними програмами*: «Фінанси, банківська справа та страхування», «Міжнародний бізнес», «Облік і оподаткування», «Маркетинг», «Менеджмент», «Економіка підприємства», «Управління персоналом і економіка праці», «Економічна кібернетика», «Управління інформаційними комунікаціями», «Публічне управління та адміністрування» *спеціальностей*: 072 «Фінанси, банківська справа та страхування», 292 «Міжнародні економічні відносини», 071 «Облік і оподаткування», 075 «Маркетинг», 073 «Менеджмент», 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність», 051 «Економіка», 029 «Інформаційна, бібліотечна та архівна справа», 281 «Публічне управління та адміністрування» денної та заочної форм навчання

Частина 2

Рекомендовано науково-методичною радою
з якості ННІЕМ
Протокол № 1 від 04.01.2021 р.

Рівне – 2021

Методичні вказівки до самостійної роботи та підготовки до практичних занять з навчальної дисципліни **«Вища математика»** для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за *освітньо-професійними програмами*: «Фінанси, банківська справа та страхування», «Міжнародний бізнес», «Облік і оподаткування», «Маркетинг», «Менеджмент», «Економіка підприємства», «Управління персоналом і економіка праці», «Економічна кібернетика», «Управління інформаційними комунікаціями», «Публічне управління та адміністрування» *спеціальностей*: 072 «Фінанси, банківська справа та страхування», 292 «Міжнародні економічні відносини», 071 «Облік і оподаткування», 075 «Маркетинг», 073 «Менеджмент», 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність», 051 «Економіка», 029 «Інформаційна, бібліотечна та архівна справа», 281 «Публічне управління та адміністрування» денної та заочної форм навчання.Частина 2 [Електронне видання] / Цецик С. П., Самолюк І. В. – Рівне : НУВГП, 2021. – 41 с.

Укладачі: Цецик С. П, - к.п.н, доцент кафедри вищої математики;
Самолюк І. В. – асистент кафедри вищої математики.

Відповідальний за випуск:
Тадеєв П. О., к.фіз.-мат.н., д.п.н., професор, завідувач кафедри вищої математики.

Керівники груп забезпечення:

072, Мельник Л. М., к.е.н., доцент кафедри фінансів та економіки природокористування;

292, Качан О. І., к.е.н., доцент кафедри економіки підприємства і міжнародного бізнесу;

071, Позняковська Н. М., к.е.н., завідувач кафедри обліку і аудиту;

075, Попко О. В., к.е.н., доцент кафедри маркетингу;

073, Кожушко Л. Ф., д.т.н., професор, завідувач кафедри менеджменту;

076, Кушнір Н. Б., к.е.н., доцент кафедри економіки підприємства і міжнародного бізнесу;

051, Юрчик Г. М., к.е.н., доцент кафедри трудових ресурсів і підприємництва;

051, Грицюк П. М., д.е.н.,завідувач кафедри комп'ютерних технологій та економічної кібернетики;

029, Цецик Я. П, к.і.н., доцент кафедри державного управління документознавства та інформаційної діяльності;

281, Антонова С. Є., к.е.н., доцент кафедри державного управління документознавства та інформаційної діяльності.

ЗМІСТ

Вступ

Мета навчальної дисципліни «Вища математика» – формування системи теоретичних знань і практичних навичок з основ математичного апарату.

Завдання навчальної дисципліни «Вища математика» – вивчення основних принципів та інструментарію математичного апарату, який використовується для розв'язування задач за фахом.

У результаті вивчення даного курсу студент повинен:

знати: правила аналітичних перетворень, методи розв'язання математичних задач; означення основних математичних понять; формулювання та доведення основних теорем; основні властивості математичних об'єктів та можливості їх застосування до розв'язання конкретних економічних задач;

уміти: використовувати набуті математичні знання для розв'язання економічних задач; розв'язувати типові математичні задачі з доведенням їх до практичного прийнятного результату з використанням різних обчислювальних засобів; аналізувати одержані результати та на їх основі розробляти практичні рекомендації; самостійно вивчати навчальну літературу з математики.

У методичних рекомендаціях подано кроткі теоретичні відомості, необхідні для розв'язання задач з чотирьох розділів курсу вищої математики: «Невизначений інтеграл», «Визначений інтеграл», «Функції декількох змінних», «Звичайні диференціальні рівняння». Вони представлені у вигляді таблиць, що сприяє систематизації й узагальненню знань з навчального предмету. Для підготовки до практичних занять, колоквіумів та екзамену наведено перелік контрольних запитань і вказано літературу, яку потрібно опрацювати.

Також наведено приклади розв'язання типових задач, що виносяться на модульні роботи. Для закріплення здобутих студентами знань і формування навичок розв'язання задач, наведено завдання для самоконтролю та самостійної роботи.

Короткі теоретичні відомості
1. Невизначений інтеграл

Назва поняття, означення	Аналітичний запис
Функція *F(x)* називається первісною функції *f(x)* на проміжку *(a;b)*, якщо *F(x)* диференційовна на *(a;b)* і справджується рівність $F'(x)=f(x),\ x\in(a;b)$	$F'(x)=f(x)$ для $\forall x\in(a;b)$
Невизначеним інтегралом функції *f(x)* називається сукупність усіх первісних *F(x)+C* заданої функції. Позначення: $\int f(x)dx$	$\int f(x)dx = F(x)+C$, де $\int$ – знак інтеграла; *f(x)dx* – підінтегральний вираз; *f(x)* – підінтегральна функція; *x* – змінна інтегру-вання; *C=const* .

Основні властивості невизначеного інтеграла (правила інтегрування)	
1	2
Властивості (правила)	**Аналітичний запис**
Похідна від невизначеного інтег-рала дорівнює підінтегральній функції.	$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу.	$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
Невизначений інтеграл від диферен-ціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої.	$\int dF(x) = F(x)+C$
Сталий множник можна винести за знак інтеграла.	$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$ де *k=const*

Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій *f(x)* та *g(x)* дорівнює алгебраїчній сумі невизначених інтегралів від цих функцій за умови, що *f(x)* та *g(x)* мають первісні.	$\int\left(f(x) \pm g(x)\right)dx =$ $= \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Таблиця основних невизначених інтегралів Нехай *u=u(x)* – диференційовна функція, тоді:	
1. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$ $\alpha \neq -1$	12. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\frac{u}{2} \right\rvert + C;$
2. $\int du = u + C;$	13. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right\rvert + \mathrm{C};$
3. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$	14. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}u + \mathrm{C};$
4. $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C;$	15. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}u + \mathrm{C};$
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$	16. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + \mathrm{C};$
6. $\int e^u du = e^u + C;$	17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + \mathrm{C};$
7. $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u \rvert + C;$	18. $\int \frac{du}{1+u^2} = \mathrm{arctg}u + \mathrm{C};$
8. $\int \sin u du = -\cos u + C;$	19. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + \mathrm{C};$
9. $\int \cos u du = \sin u + C;$	20. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert \frac{u-a}{u+a} \right\rvert + C;$
10. $\int \mathrm{tg}u du = -\ln\lvert \cos u \rvert + C;$	21.

	$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C;$
11. $\int \mathrm{ctg}\, u du = \ln\left|\sin u\right| + C;$	22. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

Зауваження. Кожна з формул, наведених у таблиці, справедлива на проміжку, що належить області визначення підінтегральної функції.

Основні методи інтегрування	
Назва	**Суть**
1	2
Метод безпо-середнього інтегрування	Базується на основних властивостях невизначеного інтеграла, таблиці інтегралів, а також використанні операції підведення під знак диференціала. Метод підведення під знак диференціала дає можливість звести нетабличний інтеграл відносно змінної x до табличного інтеграла відносно змінної $u(x)$. При цьому використовуються таблиця диференціалів і такі правила: 1) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C,\ a = const;$ 2) $d(u(x)) = u'(x)dx.$
Метод заміни змінної	$\int f(x)dx = \left|x = \varphi(t)\right| = \int f(\varphi(x))\varphi'(t)dt$ ($f(x)$ має первісну на інтервалі $(a;b)$; $\varphi(x)$ визначена і диференційовна на інтервалі $(\alpha;\beta)$, причому $\varphi(\alpha)=a$; $\varphi(\beta)=b$)
Метод інтегрування частинами	$\int udv = uv - \int vdu$ (функції $u=u(x)$ і $v=v(x)$ мають на деякому проміжку неперервні похідні). *Рекомендації до застосування методу:*

	1. Якщо $\int P_n(x)\begin{Bmatrix} a^{mx} \\ \sin mx \\ \cos mx \end{Bmatrix}dx,$ то $u=P_n(x); dv=\begin{Bmatrix} a^{mx} \\ \sin mx \\ \cos mx \end{Bmatrix}dx.$
	2. Якщо $\int P_n(x)\begin{Bmatrix} \ln(ax+b) \\ \arcsin(ax+b) \\ \mathrm{arctg}(ax+b) \end{Bmatrix}dx,$ то $u=\begin{Bmatrix} \ln(ax+b) \\ \arcsin(ax+b) \\ \mathrm{arctg}(ax+b) \end{Bmatrix}; dv=P_n(x)dx,$ де $P_n(x)$ – многочлен степеня n. 3. Якщо $\int a^{nx}\cdot\begin{Bmatrix} \sin mx \\ \cos mx \end{Bmatrix}dx,$ то можливий довільний вибір співмножників u і dv.
Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен $\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	$\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$ $=\frac{A}{2a}\int\frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+(B-\frac{Ab}{2a})\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=$ $=\frac{A}{2a}\int\frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+(B-\frac{Ab}{2a})\int\frac{dx}{\sqrt{\underbrace{ax^2+bx+c}_{\text{виділити повний квадрат}}}}=$ $=\begin{bmatrix} \text{логарифм} \\ \text{або} \\ \text{корінь} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \text{арктангенс,} \\ \text{логарифм або} \\ \text{арксинус} \end{bmatrix}$

Інтегрування раціональних дробів	
Раціональні дроби	**Інтеграли від раціональних дробів**
1	2
Найпростіші раціональні дроби Типу I: $\dfrac{A}{x-a}$	$\displaystyle\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln\lvert x-a\rvert + C$
Типу II: $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, де $n \geq 2$ Типу III: $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, де $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$	$\displaystyle\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$ $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) +$ $\displaystyle + \frac{N - \frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C$
Правильний раціональний дріб $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де $m < n$	Інтеграл $\displaystyle\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx$ зводиться до інтегрування суми найпростіших дробів типів I-III. При цьому слід пам’ятати: 1. Дійсному простому кореню знаменника $x=a$ відповідає дріб типу I: $\dfrac{A}{x-a}$. 2. Дійсному кореню знаменника $x=b$ кратності l відповідає сума l дробів типів I і II: $\dfrac{A_1}{x-b} + \dfrac{A_2}{(x-b)^2} + \ldots + \dfrac{A_l}{(x-b)^l}$

1	2
	3. Парі комплексно-спряжених коренів знаменника або квадратному тричлену x^2+px+q з $D=\frac{p^2}{4}-q<0$ відповідає дріб типу: $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$
Неправильний раціональний дріб $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де $m \geq n$	$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx=\int T_{m-n}(x)dx+\int \frac{R_p(x)}{Q_n(x)}dx$, де $T_{m-n}(x)$ – многочлен (ціла частина дробу); $\frac{R_p(x)}{Q_n(x)}$ – правильний раціональний дріб $(p<n)$

Інтегрування найпростіших ірраціональних функцій	
Інтеграл R – раціональна функція вказаних аргументів;	**Підстановка**
$\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, ..., x^{\frac{p}{q}}\right)dx$	$x=t^k$, де k – спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, ..., \frac{p}{q}$
$\int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m}{n}}, ..., (ax+b)^{\frac{p}{q}}\right)dx$	$ax+b=t^k$, де k – спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, ..., \frac{p}{q}$
$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}\right)dx$	$\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, де k – спільний знаменник дробів $\frac{m}{n}, ..., \frac{p}{q}$

$\int R\left(x, \sqrt{x^2 + a^2}\right) dx$	$x = a\ \mathrm{tg}t$ (або $x = a\ \mathrm{ctg}t$)
$\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$	$x = \dfrac{a}{\cos t}$ (або $x = \dfrac{a}{\sin t}$)
$\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$	$x = a\sin t$ (або $x = a\cos t$)

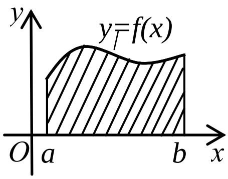
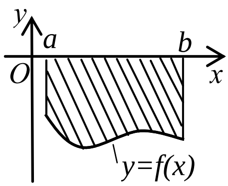
Інтегрування найпростіших тригонометричних функцій	
Інтеграл	**Підстановка або формули для перетворення виразів перед інтегруванням**
1	2
$\int R(\sin x; \cos x) dx$	Універсальна тригонометрична підстановка $t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}; \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}; \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2} dt \end{cases}$
$\int R(\sin^{2p} x; \cos^{2q} x) dx$, де p і q – цілі числа	$t = \mathrm{tg}x \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2}; \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+t^2}; \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{cases}$
$\int R(\sin x) \cos x dx$	$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$
$\int R(\cos x) \sin x dx$	$t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$
$\int R(\mathrm{tg}x) dx$	$t = \mathrm{tg}x$
$\int \sin^m x \cos^n x dx$, де m, n – цілі числа	Зводиться до інтеграла від раціональної функції або до табличного: а) якщо m – парне, а n –непарне, то

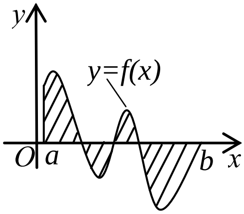
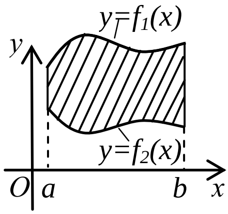
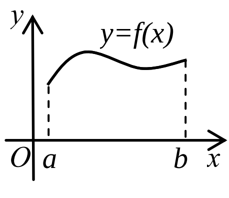
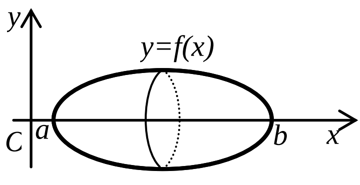
	використовують підстановку $\sin x = t$; б) якщо m – непарне, а n – парне, то використовують підстановку $\cos x = t$; в) якщо m,n – парні і невід'ємні, то використовують формули зниження степеня:
	$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2};$ $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x;$ г) якщо m,n – парні, але принаймі одне з них від'ємне, то використовують підстановку $\mathrm{tg} x = t$ (або $\mathrm{ctg} x = t$)
$\int \sin mx \cos nx dx$	$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\right)$
$\int \sin mx \sin nx dx$	$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right)$
$\int \cos mx \cos nx dx$	$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right)$

2. Визначений інтеграл

Обчислення визначеного інтеграла	
Назва	**Аналітичний запис**
Формула Ньютона-Лейбніца	$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big\vert_a^b = F(b) - F(a)$, де – *F(x)* первісна функції *f(x)* на [*a;b*], $\Big\vert_a^b$ - знак подвійної підстановки

Формула заміни змінної у визначеному інтегралі	$\int\limits_a^b f(x)dx = \left\| \begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ dx=\varphi'(t)dt \\ \varphi(\alpha)=a \Rightarrow t_a=\alpha \\ \varphi(\beta)=b \Rightarrow t_b=\beta \end{array} \right\| = \int\limits_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt$
Формула визначеного інтегрування частинами	$\int\limits_a^b udv = uv\Big\|_a^b - \int\limits_a^b vdu$

Застосування визначеного інтеграла (геометричні задачі)		
Назва поняття	**Геометричне зображення**	**Формули для обчислення**
1	2	3
Площа плоскої фігури: а) площа криволінійної трапеції, якщо $f(x) \ge 0$		а) криву задано явно: $S=\int\limits_a^b f(x)dx;$ б) криву задано параметрично: $\begin{cases} x=x(t); \\ y=y(t), t\in[\alpha;\beta] \end{cases}$ $S=\int\limits_a^b y(t)x'(t)dt$
б) площа криволінійної трапеції, якщо $f(x) \le 0$		$S=-\int\limits_a^b f(x)dx;$
1	2	3

в) площа фігури, зображеної на рисунку		$S=\int_a^b \lvert f(x)\rvert dx;$
г) площа фігури, обмеженої кривими *y=f₁(x), y=f₂(x)* та прямими *x=a, x=b*		$S=\int_a^b \left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx$ $\left(f_2(x)\ge f_1(x)\right)$
Довжина дуги кривої		а) криву задано явно: $y=f(x), x\in[a;b]$ $l=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2 dx}$ б) криву задано параметрично: $\begin{cases} x=x(t); \\ y=y(t), t\in[\alpha;\beta] \end{cases}$ $l=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(x)\right)^2 dt}$
Об'єм тіла обертання		$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$

4. Звичайні диференціальні рівняння

Основні типи диференціальних рівнянь першого порядку, що інтегруються у квадратурах		
Назва	**Вид**	**Загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння або рекомендації щодо його розв'язання**
1	2	3
Диференціальне рівняння із змінни-ми, що відокрем-люються	$N(x)dx+M(y)dy=0$	$\int N(x)dx+\int M(y)dy=C$
Диференціальне рівняння із змінни-ми, що відокрем-люються	$N_1(x)M_1(y)dx+$ $+N_2(x)M_2(y)dy=0$ $y'=\varphi(x)\psi(y)$	$\int \frac{N_1(x)}{N_2(x)}dx+\int \frac{M_2(y)}{M_1(y)}dy=C$ $\int \frac{dy}{\psi(y)}=\int \varphi(x)dx,\ \psi(y)\neq 0$
Однорідне диференціальне рівняння першого порядку	$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	Заміною $u=\frac{y}{x}$, $y=ux,$ $y'=u'x+u,$ де $u=u(x)$ рівняння зводиться до рівняння із змінними, що відокремлюються
Лінійне рівняння	$y' + P(x)y=Q(x)$	Заміна: $y=uv,\ \ y'=u'v+uv'$, де $u=u(x), v=v(x)$
Рівняння Бернуллі	$y' + P(x)y=Q(x)y^n,$ $n\neq 0, n\neq 1$	Заміна: $y=uv,\ \ y'=u'v+uv'$, де $u=u(x), v=v(x)$

Тема 1. Невизначений інтеграл

Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо $F'(x) = f(x)$ для всіх точок цього проміжку.

Якщо функція $f(x)$ має первісну $F(x)$, то вона має їх нескінченну множину і всі вони містяться у виразі $F(x) + C$, де C – довільна стала.

Множина усіх первісних функцій для функції $f(x)$ на деякому проміжку називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ на цьому проміжку і позначається символом:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ .$$

Приклад 1.1. Знайти інтеграли:

$$а)\int \frac{dx}{x^2+11}; \quad б)\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}}; \quad в)\int \frac{dx}{x^2-25};$$

$$г)\int 4^x dx; \quad д)\int x^4 dx; \quad е)\int \left(7x^6 + 5ctg\,x - \frac{4}{x}\right)dx.$$

Розв'язання.

$$а)\int \frac{dx}{x^2+11} = \frac{1}{\sqrt{11}} arctg \frac{x}{\sqrt{11}} + C;$$

$$б)\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}} = arcsin \frac{x}{\sqrt{7}} + C;$$

$$в)\int \frac{dx}{x^2-25} = \frac{1}{10} ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right| + C; \quad г)\int 4^x dx = \frac{4^x}{ln 4} + C;$$

$$д)\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C;$$

$$е)\int \left(7x^6 + 5ctg\,x - \frac{4}{x}\right)dx = x^7 + 5ln|sin\,x| - 4ln|x| + C.$$

Приклад 1.2. Знайти інтеграли:

$$а)\int\frac{(x+2)^3}{x^2}dx;\quad б)\int\frac{x^2+\sqrt[3]{x}+5}{x}dx;\quad в)\int x\sqrt[5]{x}dx;$$

$$г)\int\frac{2+\sin x}{\sin x}dx;\quad д)\int\frac{x^2+7x+5}{x(x^2+5)}dx;\quad е)\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}.$$

Розв'язання.

$$а)\int\frac{(x+2)^3}{x^2}dx=\int\frac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2}dx=\int\left(x+6+\frac{12}{x}+\frac{8}{x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+6x+12\ln|x|-\frac{8}{x}+C;$$

$$б)\int\frac{x^2+\sqrt[3]{x}+5}{x}dx=\int\left(x+\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x}+\frac{5}{x}\right)dx=\int\left(x+x^{-\frac{2}{3}}+\frac{5}{x}\right)dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}}+5\ln|x|+C=\frac{x^2}{2}+3\sqrt[3]{x}+5\ln|x|+C;$$

$$в)\int x\sqrt[5]{x}dx=\int x\cdot x^{\frac{1}{5}}dx=\int x^{\frac{6}{5}}dx=\frac{x^{\frac{11}{5}}}{\frac{11}{5}}+C=\frac{5}{11}\sqrt[5]{x^{11}}+C;$$

$$г)\int\frac{2+\sin x}{\sin x}dx=\int\left(\frac{2}{\sin x}+1\right)dx=2\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+x+C;$$

$$д)\int\frac{x^2+7x+5}{x(x^2+5)}dx=\int\frac{(x^2+5)+7x}{x(x^2+5)}dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2+5}\right)dx=$$

$$=\ln|x|+\frac{7}{\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}};$$

$$е)\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=$$

$$=tgx-ctgx+C\ .$$

В деяких випадках інтеграл від заданої функції зводиться до простішого за допомогою операції підведення під знак диференціала, враховуючи відому рівність $U'(x)dx=dU(x)$.

Приклад 1.3. Знайти інтеграли:

$$а)\int\frac{dx}{3x+5};\quad б)\int(2x+3)^5dx;\quad в)\int\cos(5x+2)dx;$$

$$г)\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x+7};\quad д)\int\frac{\arcsin^4 x\,dx}{\sqrt{1-x^2}};\quad е)\int x\sqrt[3]{x^2+1}dx;$$

$$є)\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3+4}};\quad ж)\int\sin^2 x\cos x\,dx;\quad з)\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2+\cos x}}\ .$$

Розв'язання. Для знаходження інтегралів використаємо метод підведення під знак диференціала:

$$а)\int\frac{dx}{3x+5}=\left|dx=\frac{1}{3}d(3x+5)\right|=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x+5)}{3x+5}=\frac{1}{3}ln|3x+5|+C;$$

$$б)\int(2x+3)^5dx;=\left|dx=\frac{1}{2}d(2x+3)\right|=\frac{1}{2}\int(2x+3)^5d(2x+3)=$$

$$=\frac{(2x+3)^6}{12}+C;$$

$$в)\int\cos(5x+2)dx=\left|dx=\frac{1}{5}d(5x+2)\right|=\frac{1}{5}\int\cos(5x+2)d(5x+2)=$$

$$=\frac{1}{5}\sin(5x+2)+C;$$

$$г)\int\frac{\cos x\,dx}{\sin x+7}=\left|\cos x\,dx=d(\sin x+7)\right|=\int\frac{d(\sin x+7)}{\sin x+7}=\ln\left|\sin x+7\right|+C;$$

$$д)\int\frac{\arcsin^4 x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left|\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=d(\arcsin x)\right|=\int\arcsin^4 x\,d(\arcsin x)=$$

$$=\frac{1}{5}\arcsin^5 x+C;$$

$$е)\int x\sqrt[3]{x^2+1}\,dx=\left|x\,dx=\frac{1}{2}d(x^2+1)\right|=\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+1)^4}+C;$$

$$є)\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^3+4}}=\left|x^2\,dx=\frac{1}{3}d(x^3+4)\right|=\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3+4)}{\sqrt{x^3+4}}=\frac{2}{3}\sqrt{x^3+4}+C;$$

$$ж)\int\sin^2 x\cos x\,dx=\left|\cos x\,dx=d(\sin x)\right|=\int\sin^2 x\,d(\sin x)=\frac{\sin^3 x}{3}+C;$$

$$з)\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt{2+\cos x}}=\left|\sin x\,dx=-d(\cos x+2)\right|=-\int\frac{d(\cos x+2)}{\sqrt{\cos x+2}}=$$

$$=-2\sqrt{\cos x+2}+C.$$

Метод заміни змінної (підстановки) полягає в тому, що коли функція $f(x)$ неперервна, то поклавши $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ – неперервні, отримаємо $\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$. Цей метод в багатьох випадках дозволяє заданий (нетабличний) інтеграл відносно змінної x привести до простішого інтегралу відносно змінної t, відповідно підібраною, підстановкою $x=\varphi(t)$.

Після вибору підстановки $x=\varphi(t)$ доцільно, при розв’язуванні, скористатись такою схемою:

$$\int f(x)\,dx=\left|\begin{matrix}x=\varphi(t)\\dx=\varphi'(t)\,dt\end{matrix}\right|=\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt=\int\Phi(t)\,dt=F(t)+C=$$

$$=\begin{vmatrix} x=\varphi(t) \\ t=\varphi^{-1}(x) \end{vmatrix}=F\left(\varphi^{-1}(x)\right)+C\ .$$

В ряді випадків замість підстановки $x=\varphi(t)$ зручно скористатись підстановкою $t=\psi(x)$, де $\psi(x)$ – деяка частина підінтегральної функції $f(x)$.

Приклад 1.4. Знайти інтеграли:

$$а)\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1};\quad б)\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}};\quad в)\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}};$$

$$г)\int\frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{1+e^x}}dx;\quad д)\int\frac{dx}{(x+10)\sqrt{x+1}};\quad е)\int\frac{\sqrt{4-\ln x}}{x\ln x}dx.$$

Розв'язання. Для знаходження інтегралів використаємо метод заміни змінної:

$$а)\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1}=\begin{vmatrix} x=t^3 \\ dx=3t^2dt \end{vmatrix}=\int\frac{3t^2dt}{t+1}=3\int\frac{t^2-1+1}{t+1}dt=3\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=3\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+C=\begin{vmatrix} x=t^3 \\ t=\sqrt[3]{x} \end{vmatrix}=3\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2}-\sqrt[3]{x}+\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|\right)+C;$$

$$б)\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}=\begin{vmatrix} x=\dfrac{1}{t} \\ dx=-\dfrac{1}{t^2}dt \end{vmatrix}=\int\frac{-\dfrac{dt}{t^2}}{\dfrac{1}{t}\sqrt{1+\dfrac{1}{t^2}}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=$$

$$=-\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C=\left|t=\frac{1}{x}\right|=-\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right|+C=\ln\frac{|x|}{1+\sqrt{1+x^2}}+C;$$

$$в)\int\frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}=\left|\begin{array}{ll}\sqrt{e^x-1}=t, & x=ln(t^2+1);\\ e^x=t^2+1, & dx=\dfrac{2t\,dt}{t^2+1};\end{array}\right|=\int\frac{\frac{2t\,dt}{t^2+1}}{t}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=2arctg\,t+C=2arctg\sqrt{e^x-1}+C;$$

$$г)\int\frac{e^{2x}}{\sqrt[4]{1+e^x}}dx=\int\frac{e^x e^x dx}{\sqrt[4]{1+e^x}}=\left|\begin{array}{ll}\sqrt[4]{1+e^x}=t, & e^x=t^4-1;\\ 1+e^x=t^4, & e^x dx=4t^3dt;\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{(t^4-1)4t^3dt}{t}=4\int(t^6-t^2)dt=4\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^3}{3}\right)+C=\frac{4}{21}t^3(3t^4-7)+C=$$

$$=\frac{4}{21}(3e^x-4)\sqrt[4]{(e^x+1)^3}+C;$$

$$д)\int\frac{dx}{(x+10)\sqrt{x+1}}=\left|\begin{array}{ll}\sqrt{x+1}=t, & x=t^2-1;\\ x+1=t^2, & dx=2tdt;\end{array}\right|=\int\frac{2tdt}{(t^2+9)t}=2\int\frac{dt}{t^2+9}=$$

$$=\frac{2}{3}arctg\frac{t}{3}+C=\frac{2}{3}arctg\frac{\sqrt{x+1}}{3}+C;$$

$$е)\int\frac{\sqrt{4-ln\,x}}{x\,ln\,x}dx=\left|\begin{array}{ll}\sqrt{4-ln\,x}=t, & ln\,x=4-t^2;\\ 4-ln\,x=t^2, & \dfrac{dx}{x}=-2t\,dt;\end{array}\right|=-2\int\frac{t^2}{4-t^2}dt=$$

$$=2\int\frac{t^2}{t^2-4}dt=2\int\frac{t^2-4+4}{t^2-4}dt=2\int\left(1+\frac{4}{t^2-4}\right)dt=2\left(t+\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right)+C=$$

$$=2\left(\sqrt{4-\ln x}+\ln\left|\frac{\sqrt{4-\ln x}-2}{\sqrt{4-\ln x}+2}\right|\right)+C.$$

Тема 2. Визначений інтеграл

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a,b]$ і $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ – довільне розбиття цього відрізка на n частинних відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1,n}$. На кожному з них виберемо довільну точку η_i і складемо суму $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Число I_n називається інтегральною сумою функції $f(x)$, що відповідає даному розбиттю відрізка $[a,b]$ і вибору точки η_i. Позначимо $\lambda = \max \Delta x_i$, $1 \le i \le n$.

Означення. Якщо існує границя інтегральної суми I_n при $\lambda \to 0$, що не залежить від способу розбиття відрізка $[a,b]$, ні від вибору точок η_i, то ця границя називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначається $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, тобто

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i .$$

Основні властивості:

1) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$;

2) $\int\limits_a^b \left(C_1\, f_1(x) + C_2\, f_2(x)\right)dx = C_1 \int\limits_b^a f_1(x)\,dx + C_2 \int\limits_b^a f_2(x)\,dx$;

3) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$,

де c – довільне число, а функція $f(x)$ інтегрована у найбільшому з відрізків $[a,b]$, $[a,c]$, $[c,b]$.

4) Якщо m – найменше, а M – найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $a \le x \le b$, то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

5) Якщо $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то на цьому відрізку існує точка С , що $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Число $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ називається середнім значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Якщо $F(x)$ – первісна для неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ – формула Ньютона-Лейбніца.

Якщо $U(x)$ і V(x) – неперервно диференційовані функції на $[a,b]$, то справедлива формула інтегрування частинами:

$$\int\limits_a^b U\,dV = UV\Big|_a^b - \int\limits_a^b V\,dU .$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі:

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$, де $\varphi(t)$ – функція, неперервна разом зі своєю похідною $\varphi'(t)$ на відрізку $\alpha \le x \le \beta$; $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$, $f(\varphi(t))$ – функція неперервна на $[\alpha, \beta]$.

Важливо те, що замінюючи змінну у визначеному інтегралі, знаходять також нові межі інтегрування, і надалі вже не повертаються до початкової змінної.

Приклад 2.1. Обчислити інтеграли:

$a)\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1+x^2}$; $б)\int\limits_1^2 (3x^2 + 2x - 1)dx$.

Розв'язання.

а. Первісною для функції $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ є функція $F(x)=arctg\,x$,

тому $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1+x^2}=arctg\,x\Big|_0^1=arctg1-arctg0=arctg1=\dfrac{\pi}{4}$;

б. Інтегруючи алгебраїчну суму функцій для яких відомі первісні функції, маємо:

$$\int\limits_1^{22}(3x^2+2x-1)\,dx=(x^3+x^2-x)\Big|_1^2=(8+4-2)-(1+1-1)=10-1=9$$

.

Приклад 2.2. Обчислити $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{3x+1}}$.

Розв'язання. Оскільки $dx=\dfrac{1}{3}d(3x+1)$, то

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}=\frac{1}{3}\int\limits_0^1 \frac{d(3x+1)}{\sqrt{3x+1}}=\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\Big|_0^1=\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$

Приклад 2.3. Обчислити $\int\limits_1^2 \dfrac{x^2}{x+1}dx$.

Розв'язання. Використаємо відповідні тотожні перетворення:

$$\int\limits_1^2 \frac{x^2}{x+1}dx=\int\limits_1^2 \frac{x^2-1+1}{x+1}dx=\int\limits_1^2\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=(2-2+\ln 3)-\left(\frac{1}{2}-1+\ln 2\right)=\ln 3+\frac{1}{2}-\ln 2=\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}.$$

Приклад 2.4. Обчислити інтеграли:

$$a)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x\,cos^3 x\,dx;\quad б)\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2 2x\,dx.$$

Розв'язання. При розв'язуванні скористаємось методами знаходження первісних для відповідних невизначених інтегралів:

$$a)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x cos^3 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x(1-sin^2 x)d(sin x) =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 x - \sin^6 x)\,d(\sin x) = \left(\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35};$$

$$б)\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^2 2x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+cos 4x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}sin 4x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}.$$

Приклад 2.5. Обчислити інтеграли:

$$a)\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{5+4x}}dx;\quad б)\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}};\quad в)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+5cos x}.$$

Розв'язання. Використаємо метод заміни змінної для визначеного інтеграла:

$$a)\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{5+4x}}dx = \left|\begin{array}{l} \sqrt{5+4x} = t;\ dx = \frac{1}{2}t\,dt \\ 4x+5 = t^2,\quad якщо\ x=1, то\ t=3 \\ x = \frac{1}{4}(t^2-5),\quad якщо\ x=5, то\ t=5 \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{8}\int_3^5 \frac{(t^2-5)t\,dt}{t} = \frac{1}{8}\int_3^5 (t^2-5)\,dt = \frac{1}{8}\left(\frac{t^3}{3} - 5t\right)\Bigg|_3^5 =$$

$$\frac{1}{8}\left(\frac{125}{3} - 25 - 9 + 15\right) = \frac{17}{6};$$

$$б)\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}} = \left|\begin{array}{l} \sqrt[3]{x+1} = t;\ dx = 3t^2dt \\ x+1 = t^3,\quad якщо\ x=-1, то\ t=0 \\ x = t^3-1,\quad якщо\ x=0, то\ t=1 \end{array}\right| = \int_0^1 \frac{3t^2dt}{1+t} =$$

$$=3\int_0^1 \frac{t^2-1+1}{1+t}dt = 3\int_0^1\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt = 3\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$3\left(\frac{1}{2}-1+\ln 2\right) = 3\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right);$$

$$в)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+5\cos x} = \left|\begin{array}{l} tg\,\frac{x}{2}=t;\ \ якщо\ x=0,\, то\ t=0 \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\quad якщо\ x=\frac{\pi}{2},\, то\ t=1 \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \end{array}\right| =$$

$$=\int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{5-5t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}\ln 3.$$

Приклад 2.6. Обчислити інтеграли:

$$a)\int_{-1}^1 xe^{-x}dx;\quad б)\int_0^{\pi} x\sin\frac{x}{2}dx;\quad в)\int_0^1 x\,arctgx\,dx.$$

Розв'язання. Використаємо формулу інтегрування частинами визначеного інтеграла:

$$a)\int_{-1}^1 xe^{-x}dx = \left|\begin{array}{ll} u=x; & du=dx \\ dv=e^{-x}dx; & v=-e^{-x} \end{array}\right| = -xe^{-x}\Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 e^{-x}dx =$$

$$=-xe^{-x}\Big|_{-1}^1 - e^{-x}\Big|_{-1}^1 = -e^{-1}-e-e^{-1}+e = -\frac{2}{e};$$

$$б)\int_0^{\pi} x\sin\frac{x}{2}dx = \left|\begin{array}{ll} u=x; & du=dx \\ dv=\sin\frac{x}{2}dx; & v=-2\cos\frac{x}{2} \end{array}\right| =$$

$$=-2x\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx = 4\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} = 4;$$

$$в)\int_0^1 x\,arctg\,x\,dx=\begin{vmatrix} u=arctg\,x; & du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=x\,dx; & v=\dfrac{x^2}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{x^2}{2}arctg\,x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}arctg\,x\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}(x-arctg\,x)\Big|_0^1=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

Приклад 2.7. Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

а) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$; б) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x}$.

Розв’язання. а) Маємо невласний інтеграл першого роду.

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}1)=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Інтеграл збігається.

б) Маємо невласний інтеграл другого роду.

Підінтегральна функція терпить нескінчений розрив при $x=0$.

$$\int_0^1\frac{dx}{x}=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x}=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}\ln|x|\Big|_\varepsilon^1=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}\left(\ln|1|-\ln|\varepsilon|\right)=+\infty.$$

Інтеграл розбігається.

Приклад 2.8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = 3x - x^2$, $y = -x$.

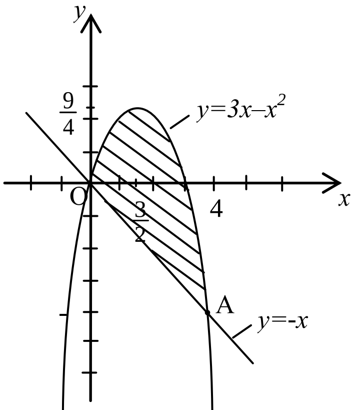


Рис. 1

Розв'язання. Знайдемо точки перетину прямої $y = f_1(x) = -x$ і параболи $y = f_2(x) = 3x - x^2$.

$$\begin{cases} y = 3x - x^2, \\ y = -x; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x, \\ -x = 3x - x^2; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -x, \\ x^2 - 4x = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x, \\ x(x-4) = 0; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0; \end{cases} \text{або} \quad \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = -4. \end{cases}$$

Точки перетину ліній $O(0;0)$ і $A(4;-4)$.
Площа цієї фігури:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx = \int_0^4 \left(3x - x^2 - (-x) \right) dx = \int_0^4 \left(4x - x^2 \right) dx =$$

$$= \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3} (\text{кв.од.}).$$

Приклад 2.9. Знайти інтеграли:

а) $\displaystyle\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}$; б) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx$; в) $\displaystyle\int_0^9 \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx.$

Розв'язання. а) Використаємо метод підведення під знак диференціала.

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}} = \left| \begin{aligned} & d(1 + \ln x) = (1 + \ln x)' dx = \\ & = \frac{dx}{x}; \end{aligned} \right| = \int_1^{e^3} \frac{d(1 + \ln x)}{\sqrt{1 + \ln x}} =$$

$$= 2\sqrt{1 + \ln x} \, \Big|_1^{e^3} = 2(\sqrt{1 + \ln e^3} - \sqrt{1 + \ln 1}) = 2(2 - 1) = 2.$$

б) Застосуємо формулу визначеного інтегрування частинами:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Тоді

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin 2x dx = \begin{vmatrix} u = x; & du = dx; \\ dv = \sin 2x dx; & v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x; \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2} - 0\right) + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \frac{1}{4}.$$

в) Обчислимо інтеграл, використавши метод заміни змінної.

$$\int_0^9 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx = \begin{vmatrix} x^{\frac{1}{2}},\ k = 2,\ x = t^2, \\ dx = 2tdx, \sqrt{x} = t; \\ \text{якщо } x = 0, \text{то } t = 0; \\ \text{якщо } x = 9, \text{то } t = 3. \end{vmatrix} = \int_0^3 \frac{2t^2 dt}{1+t} = 2\int_0^3 \frac{t^2 - 1 + 1}{t+1}dt =$$

$$= 2\int_0^3 \frac{(t-1)(t+1)}{t+1}dt + 2\int_0^3 \frac{dt}{t+1} = 2\int_0^3 (t-1)dt + 2\int_0^3 \frac{d(t+1)}{(t+1)} =$$

$$= 2\left(\frac{t^2}{2} - t\right)\Bigg|_0^3 + 2\ln|t+1|\,\Big|_0^3 = 2\left(\frac{9}{2} - 3\right) + 2(\ln|4| + \ln|1|) = 3 + 2\ln 4 =$$

$$= 3 + 4\ln 2.$$

Тема 3. Функції декількох змінних

Нехай задано множину D пар чисел $(x;\, y)$, якщо кожній парі чисел $(x;\, y) \in D$ за певним правилом відповідає єдине число z, то на множині D визначена функція z від двох змінних x і y і записується $z = f(x, y)$. Множина D в цьому випадку називається областю визначення функції. Аналогічно визначається функція трьох змінних. Оскільки кожній парі чисел $(x;\, y)$ відповідає єдина точка $M(x, y)$ площини Oxy, то замість $z = f(x, y)$ можна писати $z = f(M)$.

Функція двох змінних може бути задана в просторі у вигляді поверхні, що визначається рівнянням $z = f(x, y)$. Також функцію $z = f(x, y)$ можна задати лініями рівня, рівняння яких $f(x, y) = C$, де C – константа. Якщо константи $C_1, C_2, \ldots C_m, \ldots$ утворюють арифметичну прогресію, то отримаємо набір ліній рівня. Там, де лінії розміщення густіше, функція змінюється швидше.

Областю визначення аналітично заданої функції $z = f(x, y)$ є множина пар чисел $(x;\, y)$, яким відповідають дійсні значення цієї функції. Геометрично, область визначення функції $z = f(x, y)$ є нескінченною або скінченною частиною координатної площини Oxy, обмеженої однією або декількома кривими.

Приклад 3.1. Знайти область визначення функції $z = \ln(9 - x^2 - y^2)$.

Розв'язання. Функція має дійсні значення, якщо $9 - x^2 - y^2 > 0$ або $x^2 + y^2 < 9$. Областю визначення даної функції є внутрішня частина круга радіуса $R = 3$ з центром в початку координат. Ця область є відкритою (не містить межі) і обмеженою.

Приклад 3.2. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$.

Розв'язання. Перший доданок функції визначений при $4 - x^2 \geq 0$ або $-2 \leq x \leq 2$. Другий доданок має дійсні значення, якщо $1 - y^2 \geq 0$ або $-1 \leq y \leq 1$. Областю визначення функції є прямокутник $-2 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 1$, який включає в себе і межу області. Область замкнута і обмежена.

Приклад 3.3. Знайти лінії рівня функції $z = x^2 + y^2$.

Розв'язання. Лінії рівня цієї функції визначає рівняння $x^2 + y^2 = C$, $0 \le C < +\infty$. Надамо C різних значень, отримаємо множину ліній рівня, які є концентричними колами з центром в початку координат і радіусами $R = \sqrt{C}$. Якщо $C = 0$, то коло вироджується в точку $O(0;0)$.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x, y)$. Надамо змінній x приріст Δx, а змінній y приріст Δy так, щоб точки $M_1(x + \Delta x, y)$ і $M_2(x, y + \Delta y)$ належали даному околу. Величини $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x; y)$, $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x; y)$ називають частинними приростами функції $f(x, y)$ відповідно по x і y.

Частинні похідні по x і по y для функції $z = f(x, y)$ визначаються формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x; y) = z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} \quad (y = const);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x; y) = z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} \quad (x = const).$$

При обчисленні частинних похідних функції двох змінних використовуються вже відомі формули та правила диференціювання функції однієї змінної.

Частинними похідними другого порядку від функції $f(x, y)$ називають частинні похідні від її перших похідних:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xx}(x; y) = z''_{xx}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x; y) = z''_{yy};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{xy}(x; y) = z''_{xy}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{yx}(x; y) = z''_{yx}.$$

Частинні похідні z''_{xy} і z''_{yx} називаються мішаними частинними похідними другого порядку. В області неперервності ці похідні рівні між собою.

Приклад 3.4. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функцій:

$a)\ z = arcsin(x^2 y);\quad б)\ z = x^y + \sqrt{2x+3y}.$

Розв'язання. За правилом знаходження складної функції та формул диференціювання маємо:

$$a)\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2y)^2}}(x^2y)'_x = \frac{2xy}{\sqrt{1-x^4y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2y)^2}}(x^2y)'_y = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4y^2}}.$$

$$б)\ \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} + \frac{x}{\sqrt{2x+3y}};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^y\, ln\, x + \frac{3}{2\sqrt{2x+3y}}.$$

Приклад 3.5. Знайти частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial z}$ функції $u = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2\sin x\cos x}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}} = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\sin 2y}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}};\quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\sin 2z}{2\sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z}}.$$

Приклад 3.6. Знайти частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ функції $z = x^2 y + \ln(2x+y)$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + \frac{2}{2x+y};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + \frac{1}{2x+y}.$$

Виходячи з означення, знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y - \frac{4}{(2x+y)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{(2x+y)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x - \frac{2}{(2x+y)^2}.$$

Приклад 3.7. Знайти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, якщо $z = \sin(x \cdot y)$.

Розв'язання. Знаходимо послідовно $\dfrac{\partial z}{\partial x}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\cos(xy); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos(xy) - xy\sin(xy);$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -x\sin(xy) - x\sin(xy) - x^2 y\cos(xy) = -2x\sin(xy) - x^2 y\cos(xy).$$

Приклад 3.8. Показати що функція $u = e^{\frac{x}{y}}$ задовольняє рівняння: $\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ і $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, та підставимо їх значення у ліву частину заданого рівняння:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x}{y^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^3}\right) - \frac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{\frac{x}{y}}\left(\frac{1}{y} + \frac{x}{y^2} - \frac{x}{y^2} - \frac{1}{y}\right) = 0.$$

Одержуємо тотожність $0 = 0$.

Похідна за напрямком та градієнт функції

Нехай задана функція $u = f(x, y, z)$ разом з областю її визначення. Візьмемо в області визначення точку $M(x, y, z)$ і проведемо з цієї точки вектор $\vec{l}$, напрямні косинуси якого

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. На векторі $\vec{l}$ на відстані Δl від його початку візьмемо точку $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$. Обчислимо приріст $\Delta_l U$ функції $f(x, y, z)$ при переході від точки M до M_1 в напрямку вектора $\vec{l}$: $\Delta_l U = f(M_1) - f(M)$. Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta_l U}{\Delta l}$, то її називають похідною функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ за напрямком вектора $\vec{l}$ і позначають $\dfrac{\partial U}{\partial l}$.

Похідну за напрямком обчислюють за формулою:

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma.$$

Зауважимо, що частинні похідні $\dfrac{\partial U}{\partial x}, \dfrac{\partial U}{\partial y}, \dfrac{\partial U}{\partial z}$ обчислені в заданій точці $M(x, y, z)$.

Градієнтом функції $u = f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ називається вектор, координати якого є значення частинних похідних цієї функції в точці $M(x, y, z)$ і позначають $grad\,U$. Отже,

$$grad\,U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}.$$

Градієнт вказує напрям максимального зростання функції

$$\max \left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_M = \left|grad U\right|_M.$$

Приклад 3.9. Дано функцію $U = xy + yz + xz$ і точка $M(2,1,3)$. Знайти: 1) похідну в точці M в напрямку до точки $M_1(5,5,15)$;

2) градієнт функції в точці M;

3) найбільше значення похідної за напрямом в точці M.

Розв'язання.

1) Знаходимо частинні похідні функції в точці M :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y+z;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M}=1+3=4;\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x+z;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M}=2+3=5;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=y+x;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M}=1+2=3.$$

Знаходимо вектор $\vec{l}=\overrightarrow{MM_1}$, та його напрямні косинуси:

$$\vec{l}=\overrightarrow{MM_1}=(3,4,12);\quad \left|\vec{l}\right|=\sqrt{9+16+144}=\sqrt{169}=13;$$

$$\cos\alpha=\frac{3}{13},\quad \cos\beta=\frac{4}{13},\quad \cos\gamma=\frac{12}{13}\ .$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_{M}=\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{M}\cos\alpha+\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{M}\cos\beta+\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{M}\cos\gamma=$$

$$=4\cdot\frac{3}{13}+5\cdot\frac{4}{13}+3\cdot\frac{12}{13}=\frac{68}{13}\ .$$

2) $\left.grad\,U\right|_{M}=4\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}$.

3) $\max\left.\frac{\partial U}{\partial l}\right|_{M}=\left|grad\,U\right|_{M}=\sqrt{16+25+9}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

Приклад 3.10. Дано функцію $z=x^3y+y^2x$, точку $M(2,1)$ і вектор $\vec{l}=(3;4)$. Знайти градієнт функції в точці M і похідну в цій точці за напрямком вектора $\vec{l}$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні функції в точці M :

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y+y^2;\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M}=12+1=13;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^3+2xy;\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M}=8+4=12$$

.

$$\left.grad\,z\right|_{M}=(13;12)\ .$$

Знаходимо напрямні косинуси вектора $\vec{l}$:

$$\left|\vec{l}\right|=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5;\quad \cos\alpha=\frac{3}{5},\quad \cos\beta=\frac{4}{5}.$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_M=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M\cos\alpha+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M\cos\beta=13\cdot\frac{3}{5}+12\cdot\frac{4}{5}=\frac{87}{5}.$$

Тема 4. Диференціальні рівняння першого порядку

Звичайне диференціальне рівняння першого порядку, в загальному випадку, можна записати у вигляді $F(x,y,y')=0$, або $y'=f(x,y)$ – у випадку рівняння, розв'язаного відносно похідної.

Розв'язком диференціального рівняння називається функція $y=\varphi(x)$, яка задовольняє це рівняння. Значення шуканого розв'язку при заданому значенні аргументу $x=x_0$, тобто $y_0=\varphi(x_0)$ називаються початковими умовами. Знаходження розв'язку рівняння, який задовольняє заданим початковим умовам, називається задачею Коші.

Теорема. Нехай задано диференціальне рівняння $y'=f(x,y)$ і початкові умови $y_0=\varphi(x_0)$. Якщо функція $f(x,y)$ і її похідна $f'_y(x,y)$ неперервна в деякій області D, яка містить точку (x_0,y_0), то в достатньо малому інтервалі точки x_0 це рівняння має єдиний розв'язок, який задовольняє заданим початковим умовам.

Нехай в кожній точці області D рівняння $y'=f(x,y)$ має єдиний розв'язок. Загальним розв'язком диференціального рівняння в області D називається функція $y=\varphi(x,C)$, яка є розв'язком даного рівняння при довільних значеннях сталої C і для будь-яких початкових умов $y_0=\varphi(x_0)$ (точка $(x_0;y_0)\in D$) існує єдине значення $C=C_0$ таке, що функція $y=\varphi(x,C_0)$ задовольняє заданим початковим умовам, тобто $y_0=\varphi(x_0,C_0)$.

Рівняння $y' = f(x, y)$ є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними, якщо $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$. Таке рівняння можна записати у вигляді: $\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

Поділимо обидві частини на $f_2(y)$ $\left(f_2(y) \neq 0\right)$ і помножимо на dx. Після інтегрування отримаємо загальний розв'язок у вигляді: $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\,dx + C$. Зауважимо, що рівняння $y' = f(x)$ є найпростіше рівняння з відокремлюваними змінними. Його загальний розв'язок – $y = \int f(x)\,dx + C$.

Рівняння $y' = f(x, y)$, де функція $f(x, y)$ задовольняє умові $f(tx, ty) = f(x, y)$ для довільного числа $t \neq 0$, є однорідним диференціальним рівнянням першого порядку. Таке рівняння розв'язується підстановкою $y = xU$, де U – деяка невідома функція від x. Після підстановки функції $y = xU$ в дане рівняння, воно зводиться до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними відносно невідомої функції U .

Приклад 4.1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = -\frac{y}{x^2}$.

Розв'язання. Це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Запишемо його у вигляді $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2}$. Функція $f(x, y) = -\frac{y}{x^2}$ і її частинна похідна $f'_y(x, y) = -\frac{1}{x^2}$ неперервна в області, у якій $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ і $y \in (-\infty; +\infty)$. Тому в цій області виконуються умови теореми існування і єдиності розв'язку.

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, одержимо:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2}; \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x^2} + C; \quad \ln|y| = \frac{1}{x} + C;$$

$$|y| = e^{\frac{1}{x}+C}; \quad y = \pm C e^{\frac{1}{x}}, \text{ або } y = C e^{\frac{1}{x}}.$$

Отримана функція $y = C e^{\frac{1}{x}}$ – є шуканим загальним розв'язком.

Зауважимо, що при відокремлюванні змінних можлива втрата розв'язку $y = 0$, але цей розв'язок входить в загальний розв'язок при $C = 0$.

Приклад 4.2. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' = \dfrac{y-2}{x+5}$.

Розв'язання. Відокремлюємо змінні:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-2}{x+5}; \quad \frac{dy}{y-2} = \frac{dx}{x+5},$$

вважаючи, що $y - 2 \neq 0, \quad y \neq 2$.

Інтегруючи, знаходимо $\displaystyle\int \frac{dy}{y-2} = \int \frac{dx}{x+5} + C$, тобто

$\ln|y-2| = \ln|x+5| + \ln|C|$ або $\ln|y-2| = \ln|C(x+5)|$,

звідки одержуємо загальний розв'язок $y = 2 + C(x+5)$.

При $C = 0$ одержується розв'язок $y = 2$.

Приклад 4.3. Проінтегрувати диференціальні рівняння:

а) $(x + xy^2)dx + (y - x^2 y)dy = 0;$

б) $y' \sin x = y \ln y, \; y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e;$

в) $x^2 y' = xy + y^2;$ г) $y' + y = \dfrac{e^{-x}}{1-x}, \; y(0) = \ln 5;$

Розв'язання. а) Маємо диференціальне рівняння першого порядку із змінними, що відокремлюються. Перепишемо його у вигляді: $x(1 + y^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0.$

Відокремлюючи у ньому змінні і інтегруючи, будемо мати:

$$\frac{ydy}{1+y^2}=-\frac{xdx}{1-x^2},\ \int\frac{ydy}{1+y^2}=-\int\frac{xdx}{1-x^2},\ \frac{1}{2}\int\frac{d(1+y^2)}{1+y^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1-x^2)}{1-x^2},$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right|=\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|+\frac{1}{2}\ln|C|,\ \ln\left|1+y^2\right|=\ln\left|C(1-x^2)\right|,$$

$$1+y^2=C(1-x^2),$$

$y=\pm\sqrt{C(1-x^2)-1}$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

б) Це також диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Запишемо його у вигляді

$\frac{dy}{dx}\sin x=y\ln y,$ звідки $\frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{\sin x}.$ Інтегруємо ліву і праву частини рівняння. Одержимо:

$$\int\frac{dy}{y\ln y}=\int\frac{dx}{\sin x},\ \int\frac{d(\ln y)}{\ln y}=\int\frac{dx}{\sin x},\ \ln|\ln y|=\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+\ln|C|,$$

$\ln|y|=\mathrm{C}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2},\qquad y=e^{C\cdot\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$ – загальний розв'язок диференціального рівняння. Використовуючи початкову умову $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=e$, знайдемо значення сталої C і частинний розв'язок даного рівняння:

$$e=e^{C\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}},\ C=1.$$

Підставляючи C=1 у знайдений загальний розв'язок, одержимо частинний розв'язок рівняння $y=e^{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$.

в) Маємо однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Запишемо його у вигляді $y^{/}=\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}$. Покладаючи $y=u\cdot x,\ y^{/}=u^{/}\cdot x+u,$ де $u=u(x),$ отримаємо рівняння із змінними, що відокремлюються:

$$u' x+u=u+u^2,\ x\cdot\frac{du}{dx}=u^2,\ \int\frac{du}{u^2}=\int\frac{dx}{x},\ -\frac{1}{u}=\ln|x|+\ln|C|,$$

$u=-\dfrac{1}{\ln|Cx|},\ \dfrac{y}{x}=-\dfrac{1}{\ln|Cx|},\ y=-\dfrac{x}{\ln|Cx|}$ - загальний розв'язок диференціального рівняння.

г) Дане рівняння є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку. Робимо підстановку: $y=u\cdot v,\ y' = u' v + u v'$, де $u = u(x),\ v = v(x)$.

Отримаємо рівняння

$u' v+uv' +uv=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$. Звідки $u' v+u(v' +v)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$ (1)

Одну із функцій u або v ми можемо вибрати довільно. Виберемо функцію v так, щоб в рівності (1) вираз у дужках дорівнював нулеві. Розв'яжемо два рівняння: $v' +v=0$ і $u' v=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$.

У першому рівнянні відокремимо змінні і, проінтегрувавши його, знайдемо v:

$$\frac{dv}{dx}=-v,\ \frac{dv}{v}=-dx,\ \int\frac{dv}{v}=-\int dx,\ \ln|v|=-x+C_1.$$

Надамо сталій інтегрування довільного, зручного для обчислень значення. Нехай $C_1 = 0$, тоді: $\ln|v|=-x,\ v=e^{-x}$.

З другого рівняння знайдемо u:

$$\frac{du}{dx}e^{-x}=\frac{e^{-x}}{1-x},\ du=\frac{dx}{1-x},\ \int du=-\int\frac{d(1-x)}{(1-x)},\ u=-\ln|1-x|+\ln|C|,$$

$$u=\ln\left|\frac{C}{1-x}\right|.$$

Загальний розв'язок вихідного рівняння запишеться: $y=uv=e^{-x}\ln\left|\dfrac{C}{1-x}\right|$.

Знайдемо С, використавши початкову умову:

$\ln 5 = \frac{1}{e^0} \cdot \ln\left|\frac{C}{1-0}\right|,\ C = 5.$ Тоді шуканий частинний розв’язок

$$y = e^{-x} \cdot \ln\frac{5}{|1-x|}.$$

Використана та рекомендована література

1. Антонюк Р. А. Вища математика : навчальний посібник. Рівне : НУВГП, 2005. 246 с.
2. Бараненков Г. С. и др. Задачи и упражнения по математическому анализу / Под ред. Демидовича Б. П. М. : Наука. 1972. 480 с.
3. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1, 2. М. : Высшая школа, 1986.
4. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. Ч.1-3. Харьков : ХГУ, 1972. 946 с.
5. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. М. : Наука. 1980. 240 с.
6. Лубенська Т. В., Чупаха Л. Д. Вища математика в таблицях : довідник. К. : МАУП, 1999. 88 с.
7. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1, 2. М. : Наука, 1987.